ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHEMATIQUES (1)

(4 h)

Option Economique (prépas B)

PROBLEME I

PARTIE A

Soient E l'ensemble des fonctions continuement dérivables, et nulles en dehors d'un intervalle fermé borné ($[a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$ $a < b$) et g une fonction continue croissante.

On définit la fonction h suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & h(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, g(x)\,dx \end{array}$$

1°. Montrer que E est un espace vectoriel

2°. Montrer que h est définie sur E

3°. Montrer que h est une forme linéaire sur E
(i.e : h application linéaire de $E \longrightarrow \mathbb{R}$)

4°. On se propose de montrer que si f est positive, alors $h(f) \geqslant 0$

a) Résoudre dans le cas où g est continuement dérivable

b) En précisant pourquoi on peut le faire, resteindre le domaine d'intégration à un intervalle :

$[a, b]$ tel que $f(a) = f(b) = 0$

On définit la suite de fonctions g_n telle que :

$g_n(x) = g\left(a + p\,\frac{(b-a)}{n}\right)$ si

$a + p\,\frac{(b-a)}{n} \leqslant x < a + (p+1)\,\frac{(b-a)}{n}$ avec $p \in \left\{0, 1, \ldots, n-1\right\}$

et $g_n(b) = g(b)$

- Montrer que g_n converge uniformément vers g

(1) Lors de la correction il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et du soin apporté aux copies.

(i.e : il existe une suite u_n convergent vers 0

tel que $\forall x \in [a, b]$ $|g_n(x) - g(x)| \leqslant u_n$

- Déduire le résultat voulu en se servant de la suite g_n.

5° Montrer que si f_n est une suite de fonction de E convergent en décroissant vers 0 (i.e $\forall n, \forall x$ $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$)

alors la suite h $(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

(on suppose dans cette question g continuement dérivable)

PARTIE B

On considère les termes suivants :

$$I_n = \int_0^1 (Lgx)^n\,dx$$

1° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale impropre convergente

2° Trouver une relation de récurrence

3° Calculer pour toute valeur de n, I_n

Les exercices A et B sont indépendants.

PROBLEME II

Soit $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_m)$ $\beta = (\beta_1 \ldots \beta_m)$ deux m-uplet de nombres réels tels que $i \neq j$, $\alpha i \neq \alpha j$

On considère l'ensemble $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ l'ensemble des polynômes tel que

$$\mathcal{S}(\alpha, \beta) = \left[P \in \mathbb{R}(X) \,/\, \begin{array}{l} P(\alpha_i) = \beta_i \\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \end{array} \right]$$

On se propose de trouver la forme générale d'un élément de $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$

1° Trouver la forme générale dans le cas $m = 1$

2° Soient P_1 un polynôme tel que $P_1(\alpha_1) = \beta_1$

P2 un polynôme tel que $P_2(\alpha_2) = \beta_2$

P_m un polynôme tel que $P_m(\alpha_m) = \beta_m$

.../...

Trouver en fonction de $P_1 \ldots P_m$ un polynôme de l'ensemble $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$
En déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$

3° Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ soit un espace vectoriel.

On supposera maintenant que cette condition est vérifiée.

4°. On note $\mathcal{S}_n(\alpha, \beta) = \{ P \in \mathcal{S}(\alpha, \beta) / d^\circ P \leqslant n \}$

a) Montrer que si $m > n$ alors $\mathcal{S}_n(\alpha, \beta)$ est réduit au polynôme nul.

b) dans $n \geqslant m$ trouver la dimension et une base de l'espace $\mathcal{S}_n(\alpha, \beta)$

5°. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des polynômes de $d^\circ \leqslant n$ et α un nombre donné.
On considère l'application h de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n$

$$\mathcal{S}_n \xrightarrow{h} \mathcal{S}_n$$
$$P \longrightarrow h(P) = Q \text{ tel que } Q(X) = (X - \alpha) P'(X)$$

a) Montrer que h est une application linéaire

b) Déterminer la matrice de h en munissant $\mathcal{S}_n$ de la base canonique $(1, X \ldots, X^n)$

c) Chercher le noyau de h

d) Chercher les valeurs propres et vecteurs propres de h

e) la matrice est-elle diagonalisable. Pourquoi ?

f) Calculer h^k ($h^k = h \circ h \circ h \ldots \circ h$; k fois)

6°. On considère l'application g de $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$

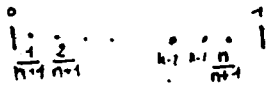
$$\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$$
$$P \longrightarrow g(P) = R \quad \text{avec } R' = h(P') \text{ et } R(\alpha) = 0$$

a) Montrer que g est une application linéaire

b) Déterminer la matrice de g en munissant $\mathcal{S}_n$ de la base canonique $(1, \ldots, X^n)$ et chercher les valeurs et vecteurs propres.

PROBLEME III

On considère un baton de longueur 1, on repère sur ce baton n points de la façon suivante :



On tire de façon équiprobable, l'une des valeurs $\frac{i}{n+1}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$), on note X le résultat. Puis parmi celles non tirées, on tire, de façon équiprobable une valeur que l'on note Y.

PARTIE A

1°. Déterminer la loi du couple (X,Y)

2°. On définit les trois variables suivantes :

A = Min (X,Y) B = 1 - MAX (X,Y) C = 1 - A - B

Donner les fonctions de répartition de A, B, C.

3°. Calculer la probabilité pour que A, B, C soient les trois longueurs des côtés d'un triangle de périmètre 1

4°. a) Calculer E(A), E(B), E(C)

b) On note $\mathcal{A}$ l'événement "on peut former un triangle avec les trois longueurs A, B, C"
Calculer la fonction de répartition de la variable A conditionnée par l'événement $\mathcal{A}$, et l'espérance de cette variable conditionnée.

5°. Calculer la covariance du couple (X,Y) et chercher la limite quand n tend vers $+\infty$

PARTIE B

On coupe maintenant le baton en deux endroits différents, au hasard et de façon indépendante (i.e X et Y sont deux variables uniformes, continues sur $[0, 1]$ et indépendantes)

. Refaire les questions précédentes, en utilisant les résultats précédents (il faut justifier pourquoi vous pouvez utiliser les résultats précédents).

(Pour le 1°. on calculera $P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$)

FIN